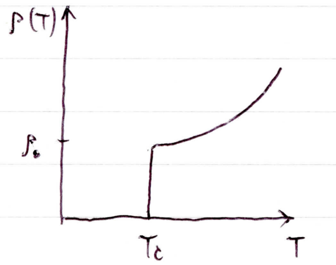
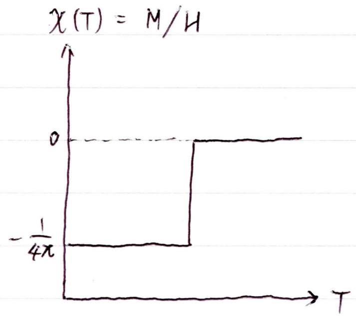
3. 超伝導

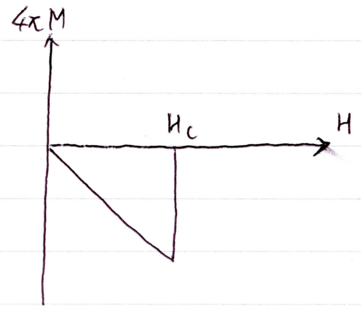
3.1 現象概観



「ゼロ抵抗」



「マイスナー効果」



$B = H + 4\pi M$

$B = 0 \qquad M = -\frac{1}{4\pi} H$

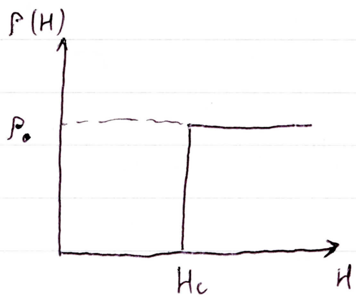
$-\frac{1}{4\pi}$ emu/cm^3

~ -1 emu/ml

$\Updownarrow$

$10^{-5} - 10^{-4}$ emu/ml

Pauli Larmor



$\underline{H_c \sim 数100\,G}$

T_c	Hg	~ 4 K
	Pb	~ 7 K
	Nb_3Ge	23 K

銅酸化物 ≲ 160 K

鉄系 ≲ 55 K (100 K ?)

$$\rho = 0 \quad \text{vs} \quad \mathbb{B} = 0$$

$\rho = 0 \rightarrow \mathbb{E} = 0$ 完全導体

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0 , \quad \mathbb{B} = \text{const.} \quad \text{not } \mathbb{B} = 0$$

$\mathbb{B} = 0$: 強い条件、本質

3.2 ロンドン方程式

$$\mathbb{j} = -ne\mathbb{v} = -\frac{ne}{m}\left(\mathbb{P} + \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)$$

$\langle \mathbb{P} \rangle \neq 0$ 常伝導電流

$\langle \mathbb{P} \rangle = 0$ としてみる

$$\mathbb{j} = -\frac{ne^2}{mc}\mathbb{A}$$

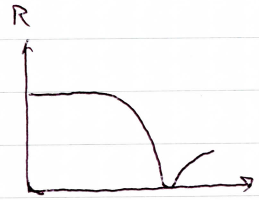
$$-\frac{ne^2}{mc}\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{j} = \nabla \times \nabla \times \frac{c}{4\pi}\mathbb{B}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left\{\nabla(\nabla \cdot \mathbb{B}) - \nabla^2 \mathbb{B}\right\}$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\nabla^2 \mathbb{B}$$

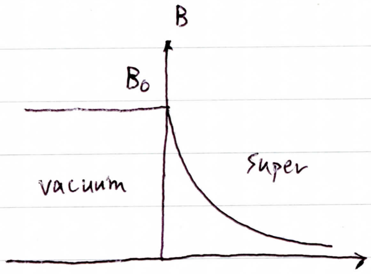
$$\nabla^2 B = \frac{4\pi ne^2}{mc^2} B = \frac{1}{\lambda^2} B$$

ω_p^2 : プラズマ周波数

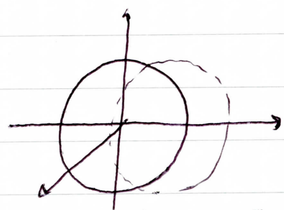


$$B(x) = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$\lambda \sim 100\,\text{nm}$



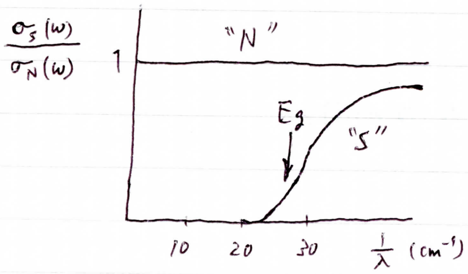
$\langle \mathbb{P} \rangle = 0$ フェルミ球「硬い」

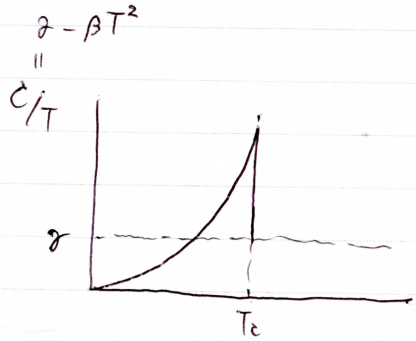


常伝導

3.3 超伝導ギャップの存在

Pb 光吸収





1eV 8000 cm^{-1}

$$\frac{E_g}{k_B T_c} \sim 5$$

$$C \propto \exp\left(-\frac{T_D}{T}\right)$$

$$T_D \sim a T_c$$

電子励起に $k_B T$ 程度の"ギャップ"

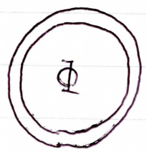
フェルミ面を凍結？

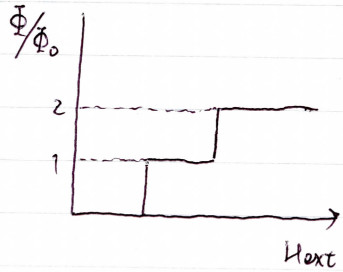
絶縁体ではない

$k_B T$ 程度のギャップ中の電子

凝縮相？？

3.4 電子対の存在，マクロなコヒーレンス

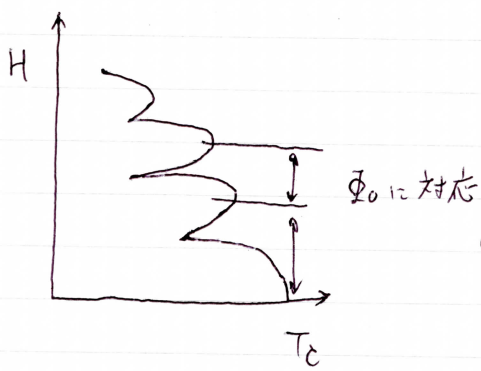




磁束の量子化

$$\Phi_0 = \frac{ch}{\text{"2"}e}$$

$$= 2.07 \times 10^{-7}\,\mathrm{G \cdot cm^2}$$



Little Parks 実験

No.

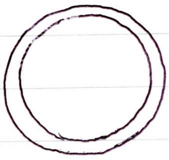
Date

二つの重要な implication

- 電子"対"　2個がユニット
- マクロなコヒーレンス

素朴な理解

$$\psi = \psi_0 e^{-i\theta(r)}$$ ：マクロな波動関数



$$-i\hbar\nabla\psi = \underbrace{-\hbar\nabla\theta}_{p}\,\psi$$

$$j_s \propto -\hbar\nabla\theta + \frac{e}{c}A \qquad j_s \text{ inside} \longrightarrow 0$$

$$\hbar\nabla\theta = \frac{e}{c}A$$

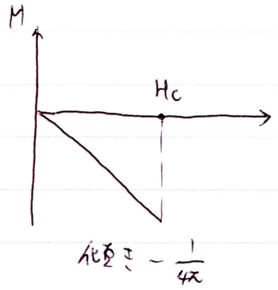
$$\oint_{\text{ドーナツ}} \hbar\nabla\theta\cdot dl = \oint \frac{e}{c}A\cdot dl$$

$$\hbar\, 2\pi n = \frac{e}{c}\Phi$$

$$\Phi = \frac{ch}{e}n \quad \longleftrightarrow \quad \text{実験} \ \frac{ch}{2e}$$

$$\frac{e}{c}A \longrightarrow \frac{\text{"}2e\text{"}}{c}A$$

3.5 超伝導凝集エネルギー



$$\Delta F = M\,dH = -\frac{H}{4\pi}\,dH$$

$$\to F_s + \frac{H_c^2}{8\pi} = F_N$$

$$F_N - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi}$$

Pb $H_c = 500$ G

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{(500)^2}{8\pi} \sim 10^4\ \mathrm{erg/cm^3} = \underline{10^{-3}\ \mathrm{J/cm^3}}$$

キャリア数 $n \sim 5\times 10^{22}\ /\mathrm{cm^3}$

$$5\times10^{22}\times k_B T_c \sim \underline{5\ \mathrm{J/cm^3}} \gg F_N - F_s$$

$(T_c \sim 7\mathrm{K})$

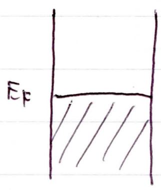
全部の電子が $\Delta \sim k_B T_c$ をかせいでいるわけではない

ギャップ $E_g \sim k_B T_c$

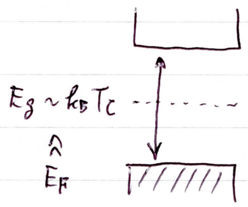
$$\underbrace{N(E_F)\,k_B T_c}_{\text{かせぐ電子数}\quad \Delta} \times \underbrace{k_B T_c}_{\Delta}$$

$$= \frac{5\times10^{22}}{2\,\mathrm{eV}} \times 10^{-22} \times 10^{-22} \sim 1.6\times10^{-3}\ \mathrm{J/cm^3}$$

超伝導のイメージ



常伝導



$$\Delta E \sim N(E_F)\underbrace{(k_B T_c)^2}_{E_g^2}$$

3.6 超伝導コヒーレンス長

$$\frac{d\omega}{dk} = v$$

k空間でのボケ $\Delta k \sim \frac{E_g}{\hbar} / v_F$ 　 $\Delta x \sim \frac{1}{\Delta k} \sim \frac{\hbar v_F}{E_g}$

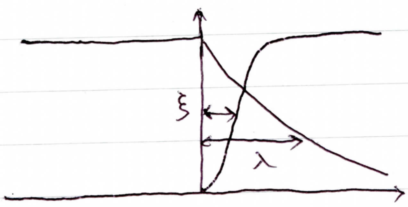
正確には $\xi = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}$

ξ：コヒーレンス長、クーパー対の拡がり

$$\xi \sim \frac{E_F}{k} / \Delta \sim \frac{E_F}{\Delta} a \sim 100 \text{ nm}$$

($E_F \sim$ eV, Δ: meV)

クーパー対：大きく拡がっている

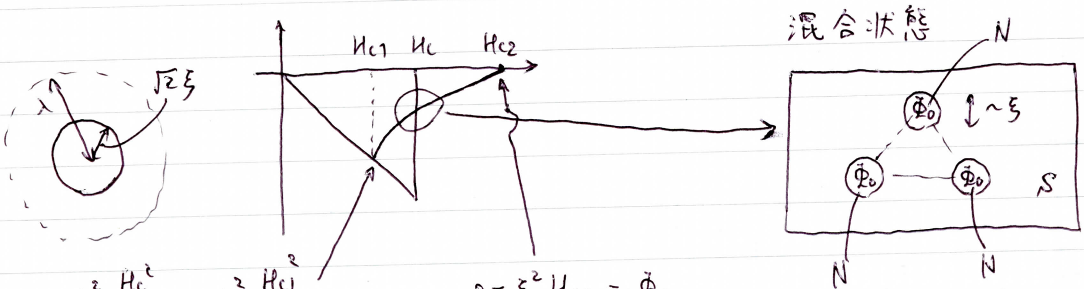


$\lambda \sim 100$ nm

$\frac{H_c^2}{8\pi}$ 損 $x < \xi$

$\frac{H^2}{8\pi}$ 得 $x < \lambda$

$\frac{H_c^2}{8\pi}\xi < \frac{H^2}{8\pi}\lambda$ のとき界面エネルギー負



$\pi \underset{\sim}{2}\xi^2 \frac{H_c^2}{8\pi} = \pi\lambda^2 \frac{H_{c1}^2}{8\pi}$

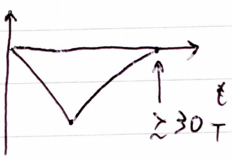
$H_{c1} = \frac{\sqrt{2}\xi}{\lambda} H_c$

$\underbrace{2\pi\xi^2 H_{c2} = \Phi_0}_{\text{埋めつくされた}}$

量子化磁束

第二種

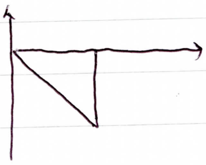
$\lambda > \sqrt{2}\xi$



「実用」

第一種

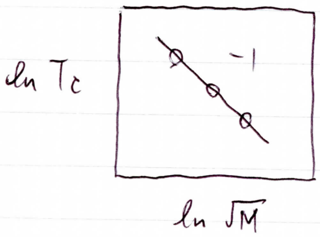
$\lambda \leq \sqrt{2}\xi$



3.7 電子格子相互作用と引力

アイソトープ効果

Hg 同位体 199, 200, 202

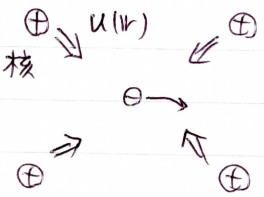


$T_c \propto \sqrt{\frac{1}{M}}$

フォノンのエネルギーでスケール?
$\sqrt{\frac{k}{M}}$

引力の担い手 phonon?
格子

電子格子相互作用から引力へ
定式化



$\nabla \cdot u(r) \propto$ 核電荷の変調
$\delta N_{ion}(r)$

電荷密度分布 $n(r)$

$$H_{int} = \frac{1}{v} \int C\, n(r)\, \nabla \cdot u \, dr$$

単位胞の大きさ　相互作用定数

$$n(\mathbf{r}) = \sum_\sigma \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\psi_\sigma(\mathbf{r})$$

$$\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Longitudinal only

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_{\mathbf{q}} \mathbf{u}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_{\mathbf{q}} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}}}_{=\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\mathbf{q}}}}\left(b_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + b_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_{\mathbf{q}} i|\mathbf{q}|\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\mathbf{q}}}}\left(b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^\dagger\right)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

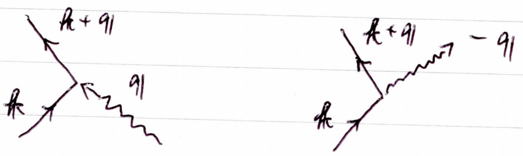
$$H = \frac{1}{v}c\int d\mathbf{r}\,\frac{1}{NA}\sum_\sigma\sum_{\mathbf{k}'}\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} c_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_{\mathbf{q}} i|\mathbf{q}|\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\mathbf{q}}}}\left(b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^\dagger\right)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

$$= \underbrace{\boxed{\underbrace{\boxed{\frac{1}{NAv}}}_{=\frac{1}{V}} c\sum_\sigma\sum_{\mathbf{k}'}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\sqrt{NA}}\, i|\mathbf{q}|\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\mathbf{q}}}}\, c_{\mathbf{k}'\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}\left(b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^\dagger\right)\int d\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}}}_{=\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}+\mathbf{q}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_\sigma\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} ic|\mathbf{q}|\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\mathbf{q}}}}\, c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}\left(b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^\dagger\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{NA}}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},\sigma} i\alpha_{\mathbf{q}}\left(b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^\dagger\right)c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}$$; 電子格子相互作用の一般形



同様に二つめのプロセスは

$$\frac{\alpha_q^2}{\varepsilon_{k'} - \varepsilon_{k'-q} - \hbar\omega_q} C^\dagger_{k+q} C^\dagger_{k'-q} C_{k'} C_k$$

$$H_{eff} = \frac{1}{2} \sum_{kqk'} \alpha_q^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} - \hbar\omega_q} + \frac{1}{\varepsilon_{k'} - \varepsilon_{k'-q} - \hbar\omega_q} \right\} C^\dagger_{k+q} C^\dagger_{k'-q} C_{k'} C_k$$

$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} \ll \hbar\omega_q$
$\varepsilon_{k'} - \varepsilon_{k'-q} \ll \hbar\omega_q$ として，スピンも明示すると，

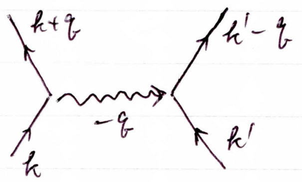
$$H_{eff} = \sum_{\substack{kk'q \\ \sigma\sigma'}} - \boxed{\frac{\alpha_q^2}{\hbar\omega_q}} C^\dagger_{k+q\sigma} C^\dagger_{k'-q\sigma'} C_{k'\sigma'} C_{k\sigma}$$

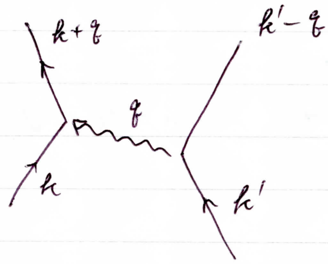
$$\alpha_q^2 = C^2 |q|^2 \frac{\hbar}{2M\omega_q} \propto \frac{|q|^2}{\omega_q}$$

$$\frac{\alpha_q^2}{\hbar\omega_q} \propto \frac{|q|^2}{\omega_q^2} \propto \text{const.}$$

$$= \sum_{\substack{k,k',q \\ \sigma,\sigma'}} \left(-\frac{V}{2}\right) C^\dagger_{k+q\sigma} C^\dagger_{k'-q\sigma'} C_{k'\sigma'} C_{k\sigma}$$

二電子の実効的相互作用





T=0 phonon なし

No.

Date

二次の摂動

$$H_{int}\frac{1}{E-H_0}H_{int}$$

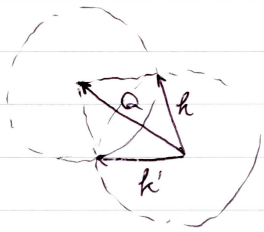
$$-\alpha_q^2 b_{-q} C_{k'-q}^{+} C_{k'} \frac{1}{\varepsilon_{k+q}+\hbar\omega_q-\varepsilon_k} b_{-q}^{+} C_{k+q}^{+} C_k$$

$[b_q, b_q^{+}]=1$

$$= -\alpha_q^2 \frac{1}{\varepsilon_{k+q}+\hbar\omega_q-\varepsilon_k} C_{k'-q}^{+} C_{k'} C_{k+q}^{+} C_k$$

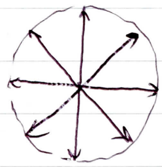
$$= \frac{\alpha_q^2}{\varepsilon_k-\varepsilon_{k+q}-\hbar\omega_q} C_{k'-q}^{+} C_{k+q}^{+} C_k C_{k'}$$

$$(k, k') \rightarrow (k+q, k'-q)$$



$k+k'=Q$

円周上



$k+k'=0$

$k+k'=0$ のプロセス支配的

$\uparrow\downarrow$ の方が Coulomb potential かせげる

exchange 項

$$\rightarrow \quad H_{eff}=\sum_k -V C_{-k\uparrow}^{+} C_{k\downarrow}^{+} C_{k\downarrow} C_{-k\uparrow}$$

$C_{k\uparrow} C_{-k\downarrow}$; $k\rightarrow -k$ で同じ

一般には $V_{kk'}$

$\uparrow\downarrow$ も相互作用の形に依存

p波 d波